

# Physik in der Oberstufe Leistungskurs, Abitur 2004

Clemens Adolphs  
Immanuel-Kant-Gymnasium  
Heiligenhaus

13.04.2004

## Zusammenfassung

Dieser Artikel stellt die wichtigsten Inhalte der Oberstufenphysik zusammen, so weit sie sich auf die schriftliche Abiturprüfung beziehen. Aus diesem Grund fehlen einige Themen aus den Bereichen Schwingungslehre, Relativitätstheorie, Kernphysik, Elementarteilchenphysik und Thermodynamik.

Es ist nicht eine komplette Zusammenfassung des Stoffes eines Leistungskurses, sondern dient der Orientierung beim Lernen und Wiederholen für die schriftliche Abiturprüfung.

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Elektrizität</b>                         | <b>3</b> |
| 1.1      | Das elektrische Feld . . . . .              | 3        |
| 1.1.1    | Die elektrische Feldstärke . . . . .        | 3        |
| 1.1.2    | Spannung und Energie . . . . .              | 3        |
| 1.1.3    | Die Elektronenkanone . . . . .              | 3        |
| 1.1.4    | Flächendichte . . . . .                     | 3        |
| 1.2      | Das radiale Coulomb-Feld . . . . .          | 3        |
| 1.2.1    | Energie im radialen Coulombfeld . . . . .   | 3        |
| 1.3      | Kondensatoren . . . . .                     | 4        |
| 1.3.1    | Die Kapazität . . . . .                     | 4        |
| 1.3.2    | Schaltung von Kondensatoren . . . . .       | 4        |
| 1.3.3    | Kondensator-Auf- und Entladung . . . . .    | 4        |
| 1.3.4    | Energie eines Kondensators . . . . .        | 4        |
| <b>2</b> | <b>Magnetfelder</b>                         | <b>5</b> |
| 2.1      | Magnete . . . . .                           | 5        |
| 2.1.1    | Magnetfelder bei Leitern . . . . .          | 5        |
| 2.1.2    | Magnetische Flussdichte . . . . .           | 5        |
| 2.1.3    | Lorentzkraft . . . . .                      | 5        |
| 2.1.4    | Halleffekt und Hallspannung . . . . .       | 5        |
| 2.2      | Spulen . . . . .                            | 6        |
| 2.2.1    | Die schlanke Spule . . . . .                | 6        |
| 2.2.2    | Gefüllte Spulen . . . . .                   | 6        |
| 2.3      | Elektronen im Magnetfeld . . . . .          | 6        |
| 2.3.1    | Kreisende Elektronen . . . . .              | 6        |
| 2.3.2    | Masse des Elektrons . . . . .               | 6        |
| 2.3.3    | Schraubenbahnen . . . . .                   | 6        |
| 2.3.4    | Ablenkung in der Braunschen Röhre . . . . . | 7        |
| 2.3.5    | Massenspektrometer . . . . .                | 7        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>3</b>  | <b>Induktion und Wechselstrom</b>                           | <b>8</b>  |
| 3.1       | Induktion . . . . .   | 8         |
| 3.1.1     | Induktion bei Leiterschleifen . . . . .                     | 8         |
| 3.1.2     | Induktion durch Magnetfeldänderung . . . . .                | 8         |
| 3.1.3     | Induktion bei gleichzeitiger Änderung von A und B . . . . . | 8         |
| 3.1.4     | Energieerhaltung und Lenzsches Gesetz . . . . .             | 8         |
| 3.1.5     | Selbstinduktion . . . . .                                   | 9         |
| 3.1.6     | Energie des Magnetfeldes . . . . .                          | 9         |
| 3.1.7     | Der elektromagnetische Schwingkreis . . . . .               | 9         |
| 3.1.8     | Elektromagnetische Wellen . . . . .                         | 10        |
| <b>4</b>  | <b>Brechung und Beugung</b>                                 | <b>11</b> |
| 4.1       | Brechung . . . . .  | 11        |
| 4.1.1     | Totalreflexion . . . . .                                    | 11        |
| 4.2       | Beugung . . . . .   | 11        |
| 4.2.1     | Beugung am Doppelspalt . . . . .                            | 11        |
| 4.2.2     | Beugung am Gitter . . . . .                                 | 12        |
| 4.2.3     | Beugung am Einzelspalt . . . . .                            | 12        |
| <b>5</b>  | <b>Der Photoeffekt</b>                                      | <b>13</b> |
| 5.1       | Quanten . . . . .   | 13        |
| 5.2       | Energie der Photoelektronen . . . . .                       | 13        |
| 5.3       | Grenzfrequenz . . . . .                                     | 13        |
| <b>6</b>  | <b>Die Relativitätstheorie</b>                              | <b>14</b> |
| 6.1       | Bedeutung für Zeit, Raum und Masse . . . . .                | 14        |
| 6.1.1     | Die Lichtuhr . . . . .                                      | 14        |
| 6.1.2     | Raumverkürzung . . . . .                                    | 14        |
| 6.1.3     | Massenänderung . . . . .                                    | 15        |
| 6.2       | Relativistische Energie . . . . .                           | 15        |
| 6.2.1     | Energie-Impuls-Beziehung . . . . .                          | 15        |
| <b>7</b>  | <b>Röntgenstrahlung</b>                                     | <b>16</b> |
| 7.1       | Erzeugung . . . . .   | 16        |
| 7.2       | Das Bremsspektrum . . . . .                                 | 16        |
| 7.3       | Die charakteristische Strahlung . . . . .                   | 16        |
| 7.4       | Braggreflexion . . . . .                                    | 16        |
| <b>8</b>  | <b>Der Comptoneffekt</b>                                    | <b>17</b> |
| <b>9</b>  | <b>Wahrscheinlichkeitswellen</b>                            | <b>18</b> |
| 9.1       | Licht als Wahrscheinlichkeitswelle . . . . .                | 18        |
| 9.2       | Materiewellen . . . . .                                     | 18        |
| 9.2.1     | Die DeBroglie-Wellenlänge . . . . .                         | 18        |
| <b>10</b> | <b>Die Schrödingergleichung</b>                             | <b>19</b> |
| 10.1      | Der Potentialtopf . . . . .                                 | 19        |
| 10.1.1    | Spektrallinien . . . . .                                    | 19        |
| 10.2      | Das Wasserstoffatom . . . . .                               | 20        |
| 10.2.1    | Die Rydbergfrequenz . . . . .                               | 20        |
| 10.2.2    | Energieniveaus anderer Atome . . . . .                      | 20        |
| <b>11</b> | <b>Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation</b>               | <b>20</b> |
| 11.1      | Impuls-Ort-Unschärfe . . . . .                              | 20        |
| 11.2      | Energie-Zeit-Unschärfe . . . . .                            | 21        |
| 11.3      | Frequenz-Zeit-Unschärfe . . . . .                           | 21        |

# 1 Elektrizität

## 1.1 Das elektrische Feld

### 1.1.1 Die elektrische Feldstärke

Die Stärke des elektrischen Feldes definiert man als „Kraft pro Ladung“:  $E = \frac{F_{el}}{q} \Rightarrow F_{el} = qE$ . Die Richtung der Kraft bezieht sich auf eine *positive* Probeladung. Die Einheit ist  $\frac{N}{C}$ . In einem *homogenen* Feld sind Betrag und Richtung der elektrischen Kraft überall gleich.

### 1.1.2 Spannung und Energie

Beim Transport von einer geladenen Platte eines Plattenkondensators zur anderen wird einer Ladung *Energie* zugeführt. Unter Spannung versteht man die Energie pro Ladung:

$$U = \frac{W}{q} = \frac{F_{el}d}{q} = \frac{qEd}{q} = Ed$$

Die Spannung ist also von der Ladung unabhängig. Aus der Gleichung folgt:  $E = \frac{U}{d}$ . Man kann  $E$  also auch in der Einheit  $\frac{V}{m}$  angeben.

### 1.1.3 Die Elektronenkanone

Wird eine Ladung in einem elektrischen Feld beschleunigt, wird aus elektrischer Energie kinetische Energie:

$$W_{kin} = W_{el} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

### 1.1.4 Flächendichte

Als **Flächendichte**  $\sigma$  (Sigma) versteht man bei einem Kondensator den Quotient aus Ladung und Oberfläche:  $\sigma = \frac{Q}{A}$ . Die Flächendichte  $\sigma$  einer felderzeugenden Ladung ist im *homogenen* Feld proportional zur Feldstärke  $E$ . In Luft und Vakuum gilt:  $\sigma = \varepsilon_0 E$  mit  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ .

## 1.2 Das radiale Coulomb-Feld

Die Kraft zwischen zwei punktförmigen oder kugelförmigen Ladungen  $Q$  und  $q$  mit Abstand der Kugelmitten  $r$  ist:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

Herleitung: Denkt man sich eine geladene Kugel „aufgeblasen“, bis sie die andere Ladung erreicht, so kann man aus der Ladungsdichte dieser imaginären Kugel auf die elektrische Feldstärke und somit auf die elektrische Kraft schließen.

### 1.2.1 Energie im radialen Coulombfeld

Ähnlich wie beim radialen Gravitationsfeld kann man die Energie im radialen Coulombfeld durch ein Integral erhalten:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für die *potentielle Energie*  $W_{pot}$  einer Ladung  $q$  im Radialfeld einer Ladung  $Q$  mit dem Abstand  $r$  gilt dann mit dem Nullniveau im Unendlichen:

$$W_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Achtung: Haben die beiden Ladungen verschiedenes Vorzeichen, so wird der Term negativ. Für das Elektron im H-Atom gilt z.B.

$$W_{pot} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

### 1.3 Kondensatoren

Kondensatoren können nicht nur elektr. Felder erzeugen, sondern auch Ladung und Energie speichern.

#### 1.3.1 Die Kapazität

Unter der Kapazität  $C$  eines Kondensators versteht man den Quotienten aus Ladung  $Q$  und Spannung der  $U$ :  $C = \frac{Q}{U}$ . Die Einheit ist:  $[C] = 1 \frac{C}{V} = 1 \text{ F}$  (Farad).

Ein *Isolator* im Kondensator steigert dessen Kapazität. Es gilt:  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$ . Die Konstante  $\epsilon_r$  nennt man die *Dielektrizitätszahl* des Stoffes. Sie gibt die Erhöhung der Kapazität durch den entsprechenden Stoff an.

Für die Flächendichte auf der Innenseite der Kondensatorplatten gilt:  $\sigma = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \epsilon_r E$ .

#### 1.3.2 Schaltung von Kondensatoren

**Parallelschaltung:** Werden Kondensatoren parallel geschaltet, so vergrößert sich die Fläche und damit die Kapazität. Es gilt:  $C_{ges} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ .

**Reihenschaltung:**  $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

Man misst die Kapazität unbekannter Kondensatoren durch das Parallelschalten bekannter Kondensatoren.

#### 1.3.3 Kondensator-Auf- und Entladung

$$U_C + U_R = U_0 \quad \text{d.h.} \quad \dot{Q} + \frac{1}{RC} Q = \frac{U_0}{R}$$

$$U(t) = \frac{Q}{C}, \quad I(t) = \dot{Q}$$

Entladung:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Aufladung:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

#### 1.3.4 Energie eines Kondensators

Die *Energie* eines geladenen Kondensators beträgt  $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$ . Die Energie „sitzt“ dabei im Feld, nicht auf den Platten des Kondensators. Die räumliche *Energiedichte* beträgt:

$$\rho_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

## 2 Magnetfelder

### 2.1 Magnete

Magnete sind von Feldlinien umgeben. Die Feldlinien geben die Richtung der magnetischen Kraft auf den Nordpol eines *Probemagneten* an.

#### 2.1.1 Magnetfelder bei Leitern

Stromdurchflossene Leiter sind von Magnetfeldern umgeben. Diese bilden Ringe um den Leiter. Zur Richtungsbestimmung dient die *Linke-Hand-Regel*. Der Daumen der linken Hand zeigt in die Flussrichtung der Elektronen, die gekrümmten Finger geben die Richtung der Feldlinien an. Benutzt man die rechte Hand, muss der Daumen in die *Stromrichtung* zeigen.

Da das Feld um einen Leiter keinen Nord- oder Südpol besitzt, sondern einen Ring bildet, spricht man von *Wirbelfeldern*.

#### 2.1.2 Magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  eines Magnetfeldes ist definiert durch  $B = \frac{F}{Is}$  wobei  $F$  die auf einen Leiter wirkende Kraft ist,  $I$  die Stromstärke im Leiter und  $s$  die Länge des Leiterstückes im Magnetfeld. („Probestromstück“). Dabei bezieht sich  $s$  nur auf die Länge des *senkrecht* zum Magnetfeld stehenden Teils des Leiters.

Die Einheit der magnetischen Flussdichte ist:  $[B] = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1 \text{ T}$  (Tesla).

#### 2.1.3 Lorentzkraft

Auf geladene Teilchen, die sich in einem Magnetfeld *nicht parallel* zu den Feldlinien bewegen, wirkt die sogenannte *Lorentzkraft*  $F_L$ . Ihre Richtung bestimmt man durch die Drei-Finger-Regel der linken Hand. Dabei sind Daumen, Zeige- und Mittelfinger senkrecht zu einander.

1. Der Daumen zeigt in die Richtung der Elektronen
2. Der Zeigefinger zeigt in die Richtung der Feldlinien des Magnetfeldes.
3. Der Mittelfinger gibt die Richtung der Lorentzkraft an.

Es gilt für ein Elektron:

$$F_L = ev_s B$$

Dabei ist  $v_s$  die Geschwindigkeit des Elektrons *senkrecht* zu den Feldlinien des Magnetfeldes.

#### 2.1.4 Halleffekt und Hallspannung

Durch die Lorentzkraft werden Elektronen in einem senkrecht zu einem Magnetfeld stehenden Leiter quer zur Stromrichtung abgelenkt, so dass eine Spannung entsteht. Diese nennt man *Hallspannung*. Sie beträgt:

$$U_{\text{Hall}} = Bv_s h$$

Dabei ist  $v_s$  die *Driftgeschwindigkeit* der Elektronen im Leiter und  $h$  die Höhe des Leiterstückes. Dieser Effekt ermöglicht das Messen der magnetischen Feldstärke, da die im Leiterstück entstehende Hallspannung proportional zur Flussdichte ist. Da man aber  $v_s$  nur abschätzen kann, muss man eine sogenannte Hallsonde in einem fest definierten Magnetfeld eichen.

## 2.2 Spulen

### 2.2.1 Die schlanke Spule

Nur in einer *schlanken* Spule ist das Magnetfeld im Inneren annähernd homogen. Für die Flussdichte gilt:

$$B = \mu_0 \frac{n}{l} I.$$

$\mu_0$  nennt man *magnetische Feldkonstante*. Es ist  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ .

### 2.2.2 Gefüllte Spulen

Eine mit Materie gefüllte Spule besitzt die magnetische Flussdichte  $\mu_r B_0$  mit dem  $B_0$  einer normalen schlanken und leeren Spule. Man nennt  $\mu_r$  auch *Permeabilitätszahl* des Materials. Nur wenige Stoffe wie z.B. Eisen besitzen ein  $\mu_r \gg 1$ , verstärken das Magnetfeld einer Spule also erheblich. Man nennt sie *ferromagnetische Stoffe*.

## 2.3 Elektronen im Magnetfeld

### 2.3.1 Kreisende Elektronen

Elektronen, die in ein Magnetfeld geschossen werden, so dass sie sich senkrecht zu dessen Feldlinien bewegen, beschreiben durch die Lorentzkraft eine Kreisbahn. Zentrifugal- und Lorentzkraft sind im Gleichgewicht:

$$F_L = F_Z \implies ev_s B = m \frac{v_s^2}{r} \implies r = \frac{v_s}{B \frac{e}{m}}$$

### 2.3.2 Masse des Elektrons

Bestimmt man  $v_s$  und  $r$  des Elektrons, kann man den Quotienten  $\frac{e}{m}$  bestimmen. Da  $e$  bekannt ist, kann man so die Masse des Elektrons bestimmen.  $v_s$  wird bestimmt, indem die Elektronen mit einer bekannten Spannung  $U$  beschleunigt werden. Dann ist  $v_s$  nämlich:

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{2U \frac{e}{m}} \\ \frac{e}{m} &= \frac{v_s}{Br} \implies \left(\frac{e}{m}\right)^2 = \frac{v_s^2}{B^2 r^2} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{2U}{B^2 r^2} \\ \implies \frac{e}{m} &= \frac{2U}{B^2 r^2} \end{aligned}$$

Man nennt  $\frac{e}{m}$  auch die *spezifische Ladung* des Elektrons.

### 2.3.3 Schraubenbahnen

Wird ein Elektron nicht senkrecht sondern schräg unter einem Winkel  $\varphi$  in ein Magnetfeld geschossen, beschreibt es eine Schraubenbahn: Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  besteht aus einer Komponente  $v_s$  *senkrecht* zum Magnetfeld und einer parallelen Komponente  $v_p$ . Die Lorentzkraft wird nur durch  $v_s$  erzeugt. Ohne  $v_p$  würde eine Kreisbahn entstehen, doch der Mittelpunkt der Kreisbahn wandert mit  $v_p$  weiter. Die Strecke, die die Schraube zurückgelegt hat, wenn das Elektron einmal gekreist ist, nennt man auch *Ganghöhe*  $h$ .

**Bestimmung der Ganghöhe:** Für  $v_s$  und  $v_p$  gilt:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{v_p}{v} \implies v_p = v \cdot \cos \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{v_s}{v} \implies v_s = v \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Für den Kreisradius gilt:  $r = \frac{mv_s}{eB}$  Für die Umlaufzeit  $T$  gilt dann:

$$T = \frac{2\pi r}{v_s} = \frac{2\pi m v_s}{eB v_s} = \frac{2\pi m}{eB}$$

Für die Ganghöhe der Schraubenbahn gilt dann:  $h = v_p \cdot T = v \cdot \cos \varphi \cdot T$

### 2.3.4 Ablenkung in der Braunschen Röhre

Durch zwei Kondensatoren werden die Elektronen in einer Braunschen Röhre horizontal und vertikal abgelenkt. Für die horizontale Ablenkung (in y-Richtung) gilt:

Aus Newtons Kraftgesetz  $F = ma$  folgt:  $a = \frac{F}{m}$ . Also gilt für die Elektronen:

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e}{m} E_y = \frac{e}{m} \frac{U_y}{d}$$

Quer zum Feld ist  $F_e l = 0$ , so dass  $v_x$  konstant bleibt und das Feld in der Zeit  $t = \frac{l}{v_x}$  durchflogen wird. In dieser Zeit erreichen die Elektronen in y-Richtung die Geschwindigkeit

$$v_y = a_y t = \frac{e U_y l}{m d v_x}$$

so dass die Ablenkung in y-Richtung  $y_1$  wegen  $s = \frac{1}{2} a t^2$  und  $e U_B = \frac{1}{2} m v_x^2$  wie folgt berechnet wird:

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{e U_y}{m d} \frac{l^2}{v_x^2} = \frac{1}{2} \frac{e U_y}{m d} \frac{l^2 m}{2 e U_B} = \frac{U_y l^2}{4 d U_B}$$

Dabei ist  $U_B$  die Beschleunigungs- und  $U_y$  die Ablenkspannung.  $l$  ist die Länge des Kondensators und  $d$  seine Höhe.

Außerhalb des Kondensators fliegen die Elektronen in der Zeit  $t' = \frac{s}{v_x}$  zum Leuchtschirm ( $s =$  Abstand Leuchtschirm-Kondensator). In dieser Zeit beträgt die Strecke in y-Richtung

$$y_2 = v_y t' = \frac{v_y}{v_x} s = \frac{e U_y l}{m d v_x^2} s = \frac{U_y l s}{2 d U_A}$$

Die gesamte Ablenkung, die das Elektron dann in y-Richtung erfährt ist also:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{l}{d} \left( \frac{l}{2} + s \right) \frac{U_y}{U_B}$$

### 2.3.5 Massenspektrometer

Mit dem Massenspektrometer kann man die *spezifische Ladung*  $\frac{q}{m}$  eines geladenen Teilchens bestimmen. Dazu benötigt man zunächst Teilchen mit einer möglichst genau definierten Geschwindigkeit. Man braucht einen Geschwindigkeitsfilter. Dazu benutzt man einen Plattenkondensator, der von einem Magnetfeld durchsetzt ist, so dass die elektrische Feldkraft der Lorentzkraft genau entgegenwirkt. Schickt man nun ein geladenes Teilchen mittig in diesen Filter, beträgt die Lorentzkraft  $F_L = qvB$  und die elektrische Feldkraft  $F_{el} = qE$ . Es werden nur Teilchen nicht abgelenkt, für die  $F_L = F_{el}$  gilt. Daraus folgt:

$$F_L = F_{el} \implies qvB = qE \implies vB = E \implies v = \frac{E}{B}$$

Da  $E$  und  $B$  leicht zu bestimmen sind, kann man die Geschwindigkeit der Teilchen leicht bestimmen.

Diese Teilchen werden nun in ein senkrecht zur Flugrichtung stehendes Magnetfeld geschickt. Dort beschreiben sie - wie oben gezeigt - eine Kreisbahn. Wie oben gezeigt kann man durch den Radius und die Geschwindigkeit des Teilchens auf die Masse schließen. Es gilt:

$$m = \frac{qBr}{v} = \frac{qB^2 r}{E}$$

## 3 Induktion und Wechselstrom

### 3.1 Induktion

Wird ein Leiter senkrecht zu einem Magnetfeld bewegt, entsteht eine *Induktionsspannung*. Diese beträgt

$$U_{ind} = Bdv_s$$

Dabei ist  $d$  die Länge des Leiterstücks.

#### 3.1.1 Induktion bei Leiterschleifen

Bewegt man eine Leiterschleife, misst man zunächst eine Induktionsspannung. Sobald aber die gesamte Schleife vom  $\vec{B}$ -Feld durchsetzt ist, misst man keine Spannung mehr. Verlässt die Schleife das  $\vec{B}$ -Feld wieder, so misst man während des Verlassens wieder eine Spannung. Dies liegt daran, dass die Induktion proportional zur *Flächenänderung* ist:

$$|U_{ind}| = B\dot{A}$$

Dabei ist es egal, wie genau die Flächenänderung stattfindet. Denkbar sind die oben beschriebene senkrechte Bewegung der Leiterschleife, doch kann es auch Rotation sein. Wichtig ist nur die Ableitung der Flächenfunktion.

Bei einer Leiterschleife mit  $n$  Windungen gilt:

$$|U_{ind}| = nB\dot{A}$$

#### 3.1.2 Induktion durch Magnetfeldänderung

Die in einem Leiter induzierte Spannung ist nicht nur proportional zur Flächenänderung  $\dot{A}$ , sondern auch zur Flissdichtenänderung  $\dot{B}$ . Es gilt:

$$|U_{ind}| = \dot{B}A$$

#### 3.1.3 Induktion bei gleichzeitiger Änderung von A und B

Es gilt:

$$|U_{ind}| = |U_{ind,A} + U_{ind,B}| = n\dot{A}B + nA\dot{B}$$

Wegen der *Produktregel* kann dies zusammengefasst werden zu

$$|U_{ind}(t)| = n(\dot{B}A)$$

Man nennt das Produkt  $BA$  auch *magnetischen Fluss* und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben  $\Phi$ . Ändert sich nun der magnetische Fluss durch Flächen- und/oder Magnetfeldstärkenänderung, so wird in einer Leiterschleife eine Spannung induziert. Es gilt:

$$|U_{ind}(t)| = n\dot{\phi}(t)$$

#### 3.1.4 Energieerhaltung und Lenzsches Gesetz

Damit die Energieerhaltung bei der Induktion nicht verletzt wird, gilt das Lenzsche Gesetz:

**Lenzsches Gesetz:** Die Induktionsspannung ist so gepolt, dass sie durch ihren Strom der Ursache entgegenwirkt. Deshalb erhält die Formel für die Induktionsspannung aus dem vorherigen Abschnitt noch ein Minuszeichen:

$$U_{ind}(t) = -n\dot{\phi}(t)$$



### 3.1.5 Selbstinduktion

Schaltet man einen Stromkreis mit einer Spule ein, erzeugt das sich aufbauende Magnetfeld der Spule in den Leiterschleifen dieser Spule eine Induktionsspannung. Beim Ausschalten der Spule tritt der gleiche Effekt ein. Aus dem Lenzschen Gesetz folgt, dass die Induktionsspannung der Ursache (Ansteigen/Absteigen des Magnetfelds beim Ein/Ausschalten) entgegen wirkt. Für das Magnetfeld einer langen Spule gilt mit  $n$  Windungen und der Länge  $l$  gilt:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} I$$

Für die Selbstinduktionsspannung der Spule gilt dann:

$$U_{ind}(t) = -n\dot{\phi}(t) = -nA\dot{B} = -(\mu_0 \mu_r n^2 \frac{A}{l}) \dot{I}(t)$$

Nun fasst man die zeitlich konstanten Daten der Spule zusammen und nennt sie *Induktivität*  $L$  der Spule:

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 \frac{A}{l}$$

Dann gilt für die Selbstinduktion:  $U_{ind}(t) = -L\dot{I}(t)$ . Die Einheit der Induktivität ist  $\frac{Vs}{A} = 1 \text{ H}$  (Henry).

### 3.1.6 Energie des Magnetfeldes

Das Magnetfeld einer Spule mit der Induktivität  $L$ , welche einen Strom der Stärke  $I$  führt, hat die Energie

$$W_{mag} = \frac{1}{2} LI^2$$

Man erhält diese Formel als Integral über der elektrischen Leistung:  $W = \int_0^\infty P(t) dt$  bei einem Ausschaltvorgang. Durch Substitution kommt man schließlich zur oben genannten Formel. Die *Energiedichte* dieses Magnetfelds kann man bestimmen, wenn man in der Formel für die Energie  $L$  durch die Konstanten ersetzt und geschickt erweitert:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n^2 \frac{A}{l} I^2 = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} \left( \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} I \right)^2 Al = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r} V$$
$$\varrho_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r}$$

### 3.1.7 Der elektromagnetische Schwingkreis

Kondensator und Spule parallel zueinander geschaltet bilden einen elektromagnetischen Schwingkreis: Die Selbstinduktionsspannung der Spule lädt den Kondensator. Der Entladestrom des Kondensators erzeugt Selbstinduktionsspannung in der Spule usw... Genau genommen pendelt die *Energie* zwischen Kondensator und Spule hin und her.

Weil Kondensator und Spule parallel zueinander liegen, gilt:

$$U_{ind} = U_C \implies -L\dot{I}(t) = -\frac{Q(t)}{C}$$

Wegen  $I(t) = \dot{Q}(t)$  ist  $\dot{I}(t) = \ddot{Q}(t)$ . Daraus folgt:

$$L\ddot{Q} = -\frac{Q(t)}{C}$$
$$L\ddot{Q} - \frac{1}{C}Q(t) = 0$$

Diese DGL hat als Lösung eine Sinus- oder Kosinusfunktion oder eine Linearkombination davon:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$Q_0$  ist die Amplitude, also muss  $Q_0 = Q_{\max}$  gelten.

Möchte man, dass für  $t = 0$   $Q = Q_{\max}$  gilt, so muss man den Sinus durch einen Kosinus ersetzen:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right)$$

Für die Spannung gilt dann:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Für die Stromstärke gilt:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -Q_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad I_0 = Q_0 \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Die *Periodendauer* der Schwingung ist  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

### 3.1.8 Elektromagnetische Wellen

Ein sich bewegendes E-Feld erzeugt ein B-Feld. Genau so erzeugt ein sich bewegendes B-Feld ein E-Feld. Es entsteht eine *elektromagnetische Welle*. Die maximale elektrische Energiedichte entspricht dabei der maximalen magnetischen Energiedichte. Aus  $\rho_E = \rho_B$  und  $E = vB$  folgt:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0\mu_r} B^2 \implies \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{\mu_0\mu_r} B^2$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r v^2 B^2 = \frac{1}{\mu_0\mu_r} B^2 \implies v^2 = \frac{1}{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r} \implies v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = c$$

Alle elektromagnetischen Wellen bewegen sich mit *Lichtgeschwindigkeit*. Es gilt  $c = \lambda \cdot f$ .

## 4 Brechung und Beugung

### 4.1 Brechung

Trifft Licht unter einem Winkel  $\alpha$  von einem optisch *dünnen* auf ein optisch *dichtes* Medium, so wird es zum Lot der Grenzfläche hin gebrochen. Daher ist der Brechungswinkel  $\beta$  kleiner als  $\alpha$ . Zu erklären ist diese Erscheinung mit dem Elementarwellenprinzip von Huygens. Es folgt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  die Lichtgeschwindigkeiten in den entsprechenden Medien sind. Für den Fall, dass das erste Medium das Vakuum ist, wird die Brechzahl  $n$  eines Mediums definiert durch  $n = \frac{c}{c_m}$ . Daraus folgt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

#### 4.1.1 Totalreflexion

Trifft Licht in einem optisch dichten Medium auf ein optisch dünneres Medium, so kann es zur sogenannten *Totalreflexion* kommen: Das Licht wird nicht mehr gebrochen, sondern vollständig reflektiert. Den Grenzwinkel für die Totalreflexion erhält man, wenn man  $\alpha = 90^\circ$  setzt und nach  $\beta$  auflöst.

### 4.2 Beugung

#### 4.2.1 Beugung am Doppelspalt

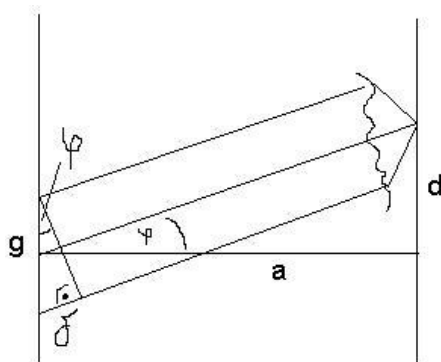


Abbildung 1: Beugung von Licht am Doppelspalt

Die stark vereinfachte Skizze zeigt das Prinzip der Beugung von Licht am Doppelspalt: Die beiden Lichtstrahlen, die von den Spaltöffnungen ausgehen, werden zunächst als parallel angenommen. Der *Gangunterschied*  $\delta$  der beiden Strahlen ist dann durch  $\sin \varphi = \frac{\delta}{g}$  und  $\tan \varphi = \frac{d}{a}$  zu berechnen.

Für *konstruktive Interferenz* muss der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda$  sein:  $\delta = k \cdot \lambda$ . Daher gilt für die Winkel, unter denen die Beugungsmaxima auftreten:

$$\sin \varphi = \frac{k \cdot \lambda}{g} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

Wegen  $\sin \varphi < 1$  gilt:

$$\frac{k \cdot \lambda}{g} < 1 \implies k < \frac{g}{\lambda}$$

Es gibt also nicht beliebig viele Beugungsmaxima, da nur begrenzt große Werte für  $k$  erlaubt sind.

### 4.2.2 Beugung am Gitter

Bei einem optischen Gitter entstehen die Hauptmaxima auf dem Schirm dort, wo der Gangunterschied  $\delta$  zwischen einem Strahl und seinen Nachbarn  $k \cdot \lambda$  ist. Es gilt für die Winkel der Beugungsmaxima die gleiche Formel wie schon beim Doppelspalt:

$$\sin \varphi = \frac{k \cdot \lambda}{g} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

Jedoch sind die sogenannten Hauptmaxima bei einem Gitter deutlich schärfer. Daneben treten bei einem Gitter auch Nebenmaxima auf. Für die erste auf ein Hauptmaximum  $n$ -ter Ordnung folgende Dunkelstelle bei einem Gitter mit  $n$  Spalten gilt:

$$\delta = k\lambda + \frac{\lambda}{n}$$

Damit ergibt sich für das Auflösungsvermögen eines Gitters

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda}{kn}$$

Zwei nahe beieinander liegende Linien mit Abstand  $\Delta\lambda$  können in der  $k$ -ten Ordnung bei einem Gitter mit  $n$  Strichen bei Erfüllung der Ungleichung gerade noch getrennt werden.

### 4.2.3 Beugung am Einzelspalt

Auch am Einzelspalt mit der Spaltbreite  $l$  tritt Beugung auf. Dies ist folgendermaßen zu erklären: Wir denken uns den Laserstrahl als ein Bündel von beispielsweise 100 Einzelstrahlen. Diese treffen auf einem Punkt am Schirm zusammen, können aber als weitgehend parallel betrachtet werden. Nun geht man für das erste Minimum davon aus, dass Strahl Nummer 1 mit Nummer 51 interferiert, Strahl 2 mit Strahl 52, Strahl 3 mit Strahl 53 und so weiter. Wenn jeder Strahl mit seinem Partner destruktiv interferiert, ergibt sich insgesamt für einen bestimmten Winkel Dunkelheit. Der Gangunterschied zwischen den beiden äußersten Strahlen sei  $\delta$ .

$$\sin \varphi = \frac{\delta}{l}$$

Für das erste Minimum muss dieser Gangunterschied  $\delta = 1 \cdot \lambda$  sein, damit Strahl 1 mit Strahl 51 den Gangunterschied  $\frac{\lambda}{2}$  hat. Das zweite Minimum kommt zustande, wenn die 100 Einzelstrahlen in vier Gruppen eingeteilt werden und zwischen den äußersten Strahlen ein Gangunterschied von  $2 \cdot \lambda$  auftritt usw. Allgemein erhält man also Minima für Winkel mit

$$\sin \varphi = \frac{k \cdot \lambda}{l} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Die Intensitätsmaxima finden sich etwa in der Mitte zwischen den Intensitätsminima. Das Einzelspalt-Interferenzmuster spielt auch beim Doppelspalt eine Rolle, da es dem Doppelspaltmuster als Einhüllende überlagert wird. Dies führt dazu, dass bestimmte Ordnungen des Doppelspaltmusters nicht sichtbar sind, da sie in einem Minimum des Einzelspaltmusters liegen.

## 5 Der Photoeffekt

Bestrahlt man eine Metallplatte mit Licht, so stellt man fest, dass unter bestimmten Voraussetzungen Elektronen aus der Metallplatte herausgeschlagen werden.

### 5.1 Quanten

Die klassische Wellentheorie versagt bei der Erklärung des Photoeffektes: Die Intensität des Lichtes hat keinen Einfluss auf die kinetische Energie der Photoelektronen. Außerdem würde man nach der klassischen Theorie erwarten, dass Licht mit großer Wellenlänge die Elektronen besser herauslösen müsste. Das Gegenteil ist der Fall.

Einstein führte zur Erklärung die Quanten ein: Licht besteht aus vielen einzelnen Energie-„Klumpen“ mit der Energie  $hf$  mit  $h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$  Js. Diese Lichtklumpen nannte er *Photonen*.

### 5.2 Energie der Photoelektronen

Für die kinetische Energie der Photoelektronen gilt nun:

$$W_{\text{kin,el}} = hf - W_A$$

Dabei ist  $W_A$  die sogenannte *Ablöseenergie*, welche materialabhängig ist.

### 5.3 Grenzfrequenz

Ist  $hf < W_A$ , so werden keine Elektronen herausgelöst. Das Licht muss also eine bestimmte Mindestfrequenz  $f_{\text{min}}$  besitzen mit

$$f_{\text{min}} = \frac{W_A}{h},$$

um überhaupt Elektronen herauslösen zu können.

## 6 Die Relativitätstheorie

Ausgehend von zwei Sätzen revolutionierte Einstein zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Physik und die Begriffe Zeit und Raum:

**Satz 1:** Alle Bezugssysteme sind gleichberechtigt, kein Bezugssystem dem anderen vorzuziehen. Das bedeutet, dass alle physikalischen Gesetze in jedem Bezugssystem gelten müssen.

**Satz 2:** Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in jedem Bezugssystem gleich und zwar  $c \approx 2,97 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### 6.1 Bedeutung für Zeit, Raum und Masse

#### 6.1.1 Die Lichtuhr

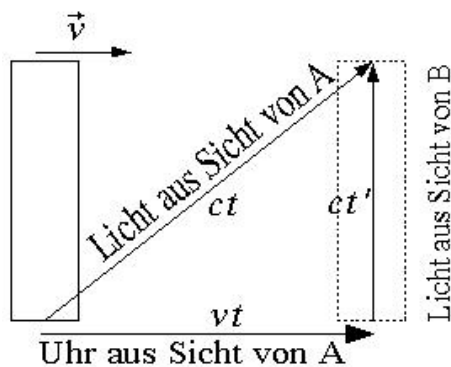


Abbildung 2: Zeitdilatation am Beispiel der Lichtuhr

Die Skizze zeigt eine Lichtuhr. Die Uhr bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zu Bezugssystem A. Bezugssystem B ist die Uhr selbst.

Wenn der Lichtstrahl nun das andere Ende der Uhr erreicht hat, so hat es im Bezugssystem B eine kleinere Strecke zurückgelegt als in Bezugssystem A. Da die Geschwindigkeit des Lichtes konstant ist, kann dies nur dadurch erklärt werden, dass die Zeit in B relativ zu A langsamer vergeht.

Geometrisch folgt aus der Skizze:

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct')^2 \implies c^2t^2 = v^2t^2 + c^2t'^2 \implies c^2t^2 - v^2t^2 = c^2t'^2 \implies t^2 - \frac{v^2}{c^2}t^2 = t'^2$$

$$t'^2 = t^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \implies t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Damit ist  $t' < t$ .

#### 6.1.2 Raumverkürzung

Aus der Zeitverkürzung folgt auch eine Raumverkürzung: Da für einen bewegten Beobachter die Zeit schneller erscheint, kommt ihm eine zurückgelegte Strecke kürzer vor, als sie dem unbewegten Beobachter erscheint. Es ist

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Diese Verkürzung tritt nur in Richtung der Bewegung auf.

### 6.1.3 Massenänderung

Aus der Zeitdilatation und der Impulserhaltung folgt, dass ein Objekt mehr Masse besitzt, wenn es in Bewegung ist: Nehmen wir eine Pistolenkugel an, die senkrecht zur Bewegungsrichtung geschossen wird. Dann ist

$$p' = p \implies m'v' = mv \implies m' \frac{s}{t'} = m \frac{s}{t} \implies m' = m \frac{st'}{ts} = m \frac{t'}{t} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Den Faktor der Massenänderung kürzt man oft auch wie folgt ab:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad \text{Dann ist } m' = \gamma m.$$

## 6.2 Relativistische Energie

Einstein fand heraus, dass Energie und Masse äquivalent sind. Es gilt allgemein die Beziehung  $W = m c^2$ . Für die Gesamtenergie eines bewegten Körpers muss dann gelten:

$$W_{rel} = m_{rel} c^2 = m_0 \gamma c^2$$

Für die relativistische kinetische Energie gilt dann statt  $W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$  folgendes:

$$W_{kin} = W_{rel} - W_0 \implies W_{kin} = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (1 - \gamma)$$

### 6.2.1 Energie-Impuls-Beziehung

Der relativistische Impuls lässt sich berechnen durch  $p = m_{rel} v = m_0 \gamma v$ .

Wir lösen nach  $v$  auf:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 v^2 \implies p^2 - \frac{p^2 v^2}{c^2} = m_0^2 v^2 \implies$$

$$p^2 = v^2 \left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) \implies v^2 = \frac{p^2}{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}$$

Nun lösen wir die Formel von  $W_{rel}$  nach  $v$  auf:

$$W_{rel} = m_{rel} c^2 = m_0 c^2 \gamma = W_0 \gamma \implies \gamma = \frac{W_{rel}}{W_0} \implies \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{W_0}{W_{rel}}$$

$$\implies 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}$$

$$\implies \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2} \implies v^2 = c^2 \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}\right)$$

Die beiden Terme für  $v^2$  können wir nun gleichsetzen:

$$\frac{p^2}{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} = c^2 \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}\right) \implies p^2 = (m_0^2 c^2 + p^2) \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}\right)$$

$$\implies p^2 c^2 = ((m_0 c^2)^2 + p^2 c^2) \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}\right) \implies p^2 c^2 = (W_0^2 + p^2 c^2) \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2}\right)$$

$$\implies p^2 c^2 = W_0^2 - \frac{W_0^4}{W_{rel}^2} + p^2 c^2 - \frac{W_0^2 p^2 c^2}{W_{rel}^2} \implies 0 = W_0^2 \left(1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2} - \frac{p^2 c^2}{W_{rel}^2}\right)$$

$$\implies 0 = 1 - \frac{W_0^2}{W_{rel}^2} - \frac{p^2 c^2}{W_{rel}^2} \implies 0 = W_{rel}^2 - W_0^2 - p^2 c^2 \implies W_{rel}^2 = (pc)^2 + W_0^2$$

Diese letzte Beziehung nennt man auch den *relativistischen Pythagoras*.

## 7 Röntgenstrahlung

### 7.1 Erzeugung

Schnelle Elektronen, die auf bestimmte Materialien wie z.B. Kupfer oder Molybdän auftreffen, senden Photonen mit sehr kleiner Wellenlänge (im Pikometerbereich) aus. Die Strahlung ist allerdings nicht „scharf“ sondern besteht aus einem *Bremsspektrum* und einigen Maxima, die die *charakteristische Strahlung* ausmachen.

### 7.2 Das Bremsspektrum

Die Photonen maximaler Energie entstehen genau dann, wenn das Elektron in einem Bremsakt vollständig abgebremst wird. Dann entsteht aus seiner kompletten kinetischen Energie ein neues Photon. Es gilt:

$$W_{el} = W_{ph} \implies eU = hf \implies eU = \frac{hc}{\lambda} \implies \lambda = \frac{hc}{eU}$$

Da die maximal mögliche Energie eines Röntgenphotons damit festgelegt ist, spricht man wegen

$$W_{ph} \leq W_{el} \implies hf \leq eU \implies f \leq \frac{eU}{h}$$

von einer *Grenzfrequenz*. Elektronen, die in mehreren Bremsakten abgebremst werden, erzeugen dann alle möglichen Photonen mit geringerer Frequenz.

### 7.3 Die charakteristische Strahlung

Die charakteristische Strahlung des Röntgenspektrums entsteht durch Energieniveauübergänge von der M- zur K-Schale. Mehr dazu im Kapitel zu den Energieniveaus.

### 7.4 Braggreflexion

Röntgenstrahlung wird von einem Kristallgitter reflektiert. Dabei stellt man fest, dass sich nur unter ganz bestimmten Winkeln, den sogenannten Glanzwinkeln, Intensitätsmaxima zeigen. Diese kommen wie folgt zustande: In der Skizze ist  $d$  der Abstand der Kristallgitterebenen.

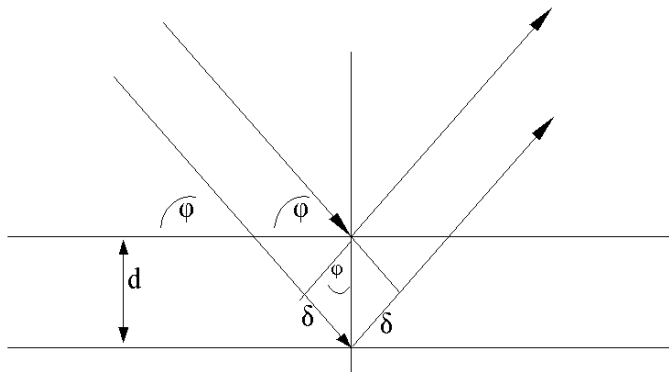


Abbildung 3: Reflexion von Röntgenstrahlen am Kristallgitter

Einige der Strahlen werden an der ersten Schicht reflektiert, andere dagegen an der zweiten Schicht oder anderen. Die Strahlen können als weitgehend parallel angesehen werden. Nun gibt es einen Gangunterschied zwischen den Strahlen, die an der ersten Schicht reflektiert werden und denen, die an der zweiten Schicht reflektiert werden. Dieser gesamte Gangunterschied beträgt in der Skizze  $2\delta$ . Aus der Skizze folgt:

$$\sin \varphi = \frac{\delta}{d} \implies \delta = d \cdot \sin \varphi$$



Für konstruktive Interferenz der Strahlen muss nun der gesamte Gangunterschied ein Vielfaches von  $\lambda$  sein. Daraus folgt:

$$2\delta = k\lambda \implies 2d \cdot \sin \varphi = k\lambda$$

Diese Beziehung wird *Braggsches Reflexionsgesetz* genannt.

## 8 Der Comptoneffekt

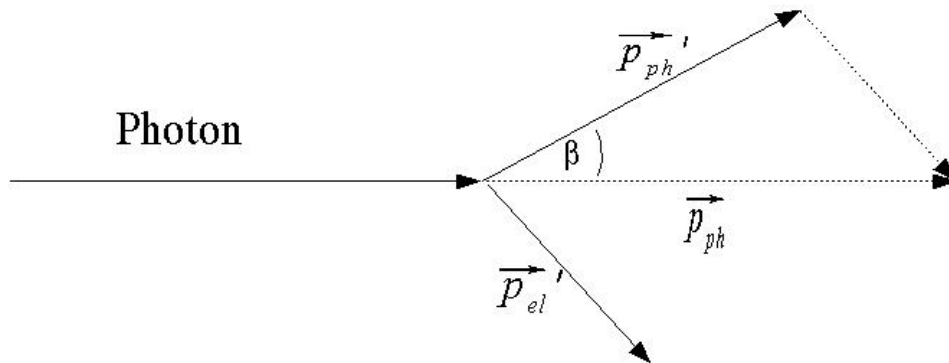


Abbildung 4: Comptoneffekt beim Stoß von Photonen und Elektronen

Stößt ein Photon gegen ein freies Elektron, so beobachtet man, dass die Wellenlänge des abgelenkten Photons größer als die Wellenlänge des ursprünglichen Photons ist. Die Wellenlängenänderung hängt dabei nur vom Winkel  $\beta$  ab, unter dem das Photon gestreut wird:

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos \beta) \quad \text{mit } \lambda_c = \frac{h}{m_{el}c} \approx 2,48 \text{ pm}$$

Man erhält diese Formel, wenn man für den Stoß die Energie- und Impulsbilanz aufstellt und trickreich umformt.

$$\text{Energiebilanz: } W_{ph} + W_{el} = W_{ph'} + W_{el'}$$

$$\text{Impulsbilanz: } p_{el'}^2 = p_{ph}^2 + p_{ph'}^2 - 2 p_{ph} p_{ph'} \cos \beta$$

## 9 Wahrscheinlichkeitswellen

### 9.1 Licht als Wahrscheinlichkeitswelle

Sämtliche Interferenzphänomene wie das Doppelspaltmuster oder die Beugung am Einzelspalt lassen sich auch dann beobachten, wenn man immer nur *ein* einzelnes Photon durch die Apparatur schickt. Die Erklärung der Wellentheorie reicht also nicht aus, um die Interferenzmuster zu erklären.

Statt dessen nimmt man folgendes an: Am Doppelspalt könnte das Photon durch den linken oder den rechten Spalt gehen. Es entstehen zwei *Wahrscheinlichkeitswellen*  $\Psi$ , welche nach den normalen Wellengesetzen miteinander interferieren. Dabei gibt dann  $|\Psi|^2$  die *Antreffwahrscheinlichkeitsdichte* des Photons an einem bestimmten Ort an. Dort, wo  $|\Psi|^2 = 0$  ist, findet man also ein Interferenzminimum.

Sobald man nun z.B. durch einen Detektor ermittelt, durch welchen der beiden Spalte das Photon gegangen ist, verschwindet die Wahrscheinlichkeitswelle dieses Spaltes schlagartig und es tritt keine Interferenz mehr auf. Wissen über die Realisierung einer Möglichkeit lässt die anderen Wellenfunktionen sofort kollabieren.

### 9.2 Materiewellen

Auch „Strahlen“ von Elektronen oder Protonen und sogar von Molekülen zeigen Interferenzerscheinungen. Teilchen haben also auch Wellencharakter.

#### 9.2.1 Die DeBroglie-Wellenlänge

Der Physiker DeBroglie nahm an, dass nicht nur Photonen, sondern z.B. auch Elektronen eine Wellenlänge besitzen. Für Photonen gilt:

$$W = hf = \frac{hc}{\lambda} \implies \lambda = \frac{hc}{W} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p}$$

Die Beziehung  $\lambda = \frac{h}{p}$  nahm er nun auch für die Wellenlänge der Teilchen an. Man nennt diese Wellenlänge die DeBroglie-Wellenlänge eines Teilchens.

## 10 Die Schrödingergleichung

Ausgehend von einer für freie Elektronen geltenden Gleichung entwickelte Schrödinger die berühmte, nach ihm benannte Gleichung. Dabei gilt für die Funktion  $\Psi$  der Wahrscheinlichkeitswelle eines Teilchens:

$$\Psi''(x) + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} (W_{ges} - W_{pot}) \Psi(x) = 0$$

Dies ist die *eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung*.

### 10.1 Der Potentialtopf

Nehmen wir einen „Topf“ mit den Grenzen 0 und  $L$  an. Innerhalb dieses Topfes sei  $W_{pot} = 0$ , außerhalb des Topfes sei  $W_{pot} = \infty$ . Für die Schrödingergleichung gilt dann innerhalb des Topfes:

$$\Psi''(x) + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} W_{kin} \Psi(x) = 0$$

Diese Differenzialgleichung hat eine Lösung für

$$\Psi(x) = C \cdot \sin(k \cdot x) \quad \text{mit } k = \frac{\pi}{h} \sqrt{8m_e \cdot W_{kin}}$$

Da sich das Elektron außerhalb des Potentialtopfes nicht aufhalten darf, muss wegen der Stetigkeit auch an den Grenzen des Potentialtopfes  $\Psi = 0$  gelten. Dies ist für die linke Grenze, also  $x = 0$  immer gegeben. Für die Grenze  $x = L$  gilt nun:

$$C \cdot \sin(k \cdot L) = 0 \implies \sin(k \cdot L) = 0 \implies$$

$$k \cdot L = n\pi \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\implies \frac{\pi}{h} \sqrt{8m_e \cdot W_{kin}} \cdot L = n\pi \implies W_{kin} = \frac{h^2}{8m_e L^2} n^2 \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Hieraus folgt, dass die kinetische Energie des Elektrons nur ganz bestimmte Werte annehmen darf, die durch die Quantenzahl  $n$  vorgegeben sind. Aus diesem Grund befinden sich in einem Potentialtopf gebundene Elektronen immer auf Energieniveaus, während ein freies Elektron beliebige Energien annehmen kann. Da diese Energie um so größer wird, je kleiner die Größe des Potentialtopfes  $L$  ist, spricht man auch von *Lokalisationsenergie*.

Um nun noch die Amplitude der Wahrscheinlichkeitswelle zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, das Elektron *irgendwo* im Topf zu finden, 1 sein muss. Die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte entspricht dem Quadrat von  $\Psi$ , also gilt:

$$\int_0^L \Psi^2(x) dx = 1 \iff \int_0^L C^2 \cdot \sin^2(kx) dx = 1 \iff C^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx = 1$$

$$\iff C^2 \frac{1}{k} \left| \frac{1}{2} (kx - \sin(kx) \cos(kx)) \right|_0^L = 1 \iff C^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \iff C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

#### 10.1.1 Spektrallinien

„Springt“ ein Elektron von einem hohen auf ein niedriges Energieniveau, wird ein Photon mit der Differenzenergie ausgesendet. Es ist

$$W_{ph} = W_o - W_u = \frac{h^2}{8m_e L^2} (n_o^2 - n_u^2),$$

wobei o für das obere und u für das untere Energieniveau steht.

Das Potentialtopfmodell hat Bedeutung bei der Abschätzung der Frequenzen von bestimmten Farbstoffmolekülen (Kohlenstoffketten) und bei der Beschreibung angeregter Zustände in Atomkernen.

## 10.2 Das Wasserstoffatom

Auch für das Elektron des Wasserstoffatoms gilt die Schrödingergleichung. Man erhält eine komplizierte Gleichung in Kugelkoordinaten. Untersucht man nur den vom Radius abhängigen Teil dieser Gleichung für den Grundzustand, erhält man für die Energieniveaus die Formel

$$W_n = -\frac{m_{el} e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \approx -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Die Wellenlängen der Energieniveauübergänge berechnet man auch hier durch die Energiedifferenz der Niveaus:

$$W_{ph} = -\frac{m_{el} e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

### 10.2.1 Die Rydbergfrequenz

Wegen  $W_{ph} = hf$  ist  $f = \frac{W_{ph}}{h}$ . Für die Frequenz eines Photons, das durch einen Übergang im Wasserstoffatom entsteht, gilt also:

$$f = \frac{W}{h} = -\frac{m_{el} e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \cdot \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

Den Faktor

$$\frac{m_{el} e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3}$$

nennt man auch *Rydbergfrequenz*  $f_{Ry}$ . Sie beträgt ungefähr  $3,29 \cdot 10^{15}$  Hz.

### 10.2.2 Energieniveaus anderer Atome

Ist ein Atom mit der Kernladungszahl  $Z$  so ionisiert, dass es nur noch ein Elektron besitzt, so gilt für dessen Energieniveaus:

$$W_n = -\frac{m_{el} Z^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -Z^2 f_{Ry} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Möchte man für größere Atomkerne die Energie für einen Übergang von einer höheren auf die K-Schale berechnen, so muss man berücksichtigen, dass die eigentliche Kernladung durch das zweite verbliebene Elektron in der K-Schale abgeschirmt wird. Man erhält die Energie, wenn man mit  $Z - 1$  statt mit  $Z$  rechnet. Dies nennt man auch *Moseleysches Gesetz*

$$W = -\frac{m_{el} (Z - 1)^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

$$f = -(Z - 1)^2 f_{Ry} \cdot \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

Diese Frequenz liegt meist im Röntgenbereich und ist für die weiter oben bereits erwähnte *charakteristische* Strahlung des Röntgenspektrums verantwortlich. Dabei regen nämlich die beschleunigten Elektronen die Elektronen des Stoffes an und heben sie aus der K-Schale auf ein höheres Niveau. Beim Rücksprung in die K-Schale entsteht dann diese Strahlung.

## 11 Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

### 11.1 Impuls-Ort-Unschärfe

In der Skizze sieht man einen Einzelspalt und einen Schirm mit dem zentralen Beugungsmaximum sowie den ersten beiden Minima. Das Photon besitzt zunächst einen durch  $p = \frac{h}{\lambda}$  scharf bestimmten Impuls. Da man nicht genau sagen kann, an welcher Stelle das Photon den Spalt

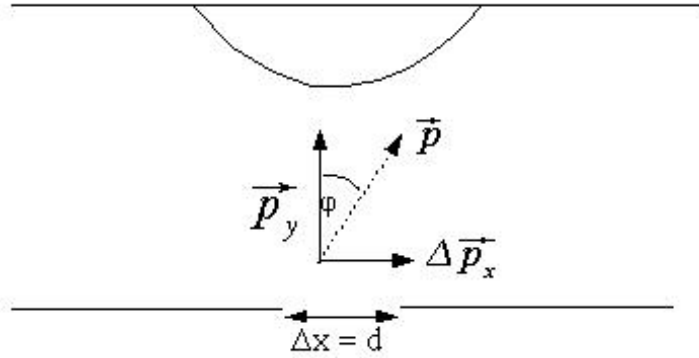


Abbildung 5: Die Heisenbergsche Unschärferelation am Einzelspalt

passiert hat, ist  $\Delta x = d$ . Durch die Beugung am Einzelspalt bekommt das Photon nun einen zufällig bestimmten Querimpuls  $\Delta p_x$ . Das Photon wird daher um einen bestimmten Winkel  $\varphi$  gebeugt. In der Skizze gilt:

$$\sin \varphi = \frac{\Delta p_x}{p} \implies \Delta p_x = p \cdot \sin \varphi = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \varphi$$

Wir nehmen abschätzungsmäßig für die Impulsunschärfe den Querimpuls an, den das Photon hätte, wenn es auf dem ersten Beugungsminimum landen würde. Für das erste Minimum eines Einzelspalttes gilt:

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

Wir ersetzen in der Gleichung für  $\Delta p_x$  nun den Sinus und erhalten:

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x} \implies \Delta p_x \cdot \Delta x \approx h$$

Dies bedeutet konkret: Je genauer man den Ort des Photons bestimmt, desto größer wird die Unbestimmtheit des Impulses und umgekehrt. Die Unschärferelation gilt natürlich auch für alle anderen Quantenobjekte.

## 11.2 Energie-Zeit-Unschärfe

Wir formen nun die Unschärferelation etwas um:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot \frac{\Delta W}{c} = \frac{\Delta x}{c} \cdot \Delta W = \Delta t \cdot \Delta W = h$$

Je genauer also die Zeit bestimmt ist, desto ungenauer ist die Energie bestimmt. Hieraus folgt auch der sogenannte *Heisenberg-Kredit*: Aus dem Nichts können für eine genügend kleine Zeit Teilchen entstehen. Die Energie dazu ist deshalb vorhanden, weil die Energie für sehr genau bestimmte Zeiten sehr ungenau bestimmt ist und daher auch sehr groß sein kann. So entstehen im Vakuum ständig Elektron-Positron-Paare aus dem Nichts, die sich allerdings sofort wieder vernichten.

## 11.3 Frequenz-Zeit-Unschärfe

Eine letzte Unschärferelation noch:

$$\Delta t \cdot \Delta W = \Delta t \cdot \Delta f h = h \implies \Delta t \Delta f = 1$$